PART2 独立な確率変数

要点 ① 独立な確率変数，独立な確率変数の積の期待値

2 つの確率変数 X, Y において，X のとる値 x_i と Y のとる値 y_j について，どのような x_i, y_j に対しても

$$P(X=x_i,\ Y=y_j)=P(X=x_i)\cdot P(Y=y_j)$$

が成り立つとき，確率変数 X, Y は互いに「　　　」であるという。

例 2 つの確率変数 X, Y の同時分布が右の表で与えられているとき

X \ Y	0	1	2	計
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
計	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

$$P(X=0,\ Y=1)=\quad=\frac{1}{4}$$

$$P(X=0)\cdot P(Y=1)=\quad\cdot\quad=\frac{1}{4}$$

よって $P(X=0,\ Y=1)=P(X=0)\cdot P(Y=1)$

X, Y の値のすべての組に関して同様の式が成り立つ。よって，X, Y は独立である。

2 つの試行 S, T が独立であるとき，S における確率変数 X と T における確率変数 Y は独立である。

2 つの独立な確率変数 X, Y の積を $Z=XY$ とすると，Z も確率変数である。確率変数 Z の期待値について考える。

X, Y の同時分布が右の表で与えられているとき，X と Y は独立であるから

X \ Y	y_1	y_2	計
x_1	p_{11}	p_{12}	p_1
x_2	p_{21}	p_{22}	p_2
計	q_1	q_2	1

$p_{11}=\qquad$, $p_{12}=p_1q_2$, $p_{21}=p_2q_1$, $p_{22}=p_2q_2$

よって
$$\begin{aligned}E(Z)&=(x_1y_1)p_{11}+(x_1y_2)p_{12}+(x_2y_1)p_{21}+(x_2y_2)p_{22}\\&=(x_1y_1)p_1q_1+(x_1y_2)p_1q_2+(x_2y_1)p_2q_1+(x_2y_2)p_2q_2\\&=x_1p_1\cdot y_1q_1+x_1p_1\cdot y_2q_2+x_2p_2\cdot y_1q_1+x_2p_2\cdot y_2q_2\\&=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=E(X)E(Y)\end{aligned}$$

一般に，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の積の期待値

確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

例　1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目と 2 回目に出る目の積の期待値を求める。

1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると , 求めるものは XY の期待値である。

$$E(X)=E(Y)=(1+2+3+4+5+6)\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$$

X，Y は独立であるから , 出る目の積 XY の期待値は

$$E(XY)=E(X)E(Y)=\qquad\cdot\qquad=\frac{49}{4}$$

要点 ②　独立な確率変数の和の分散

2 つの確率変数 X，Y が互いに独立であるとき，$E(XY)=E(X)E(Y)$ が成り立つ。これを用いると，和 $X+Y$ の分散について，分散の公式より

$$\begin{aligned}V(X+Y)&=E\left((X+Y)^2\right)-\{E(X+Y)\}^2\\&=E\left(X^2+2XY+Y^2\right)-\{E(X)+E(Y)\}^2\\&=E\left(X^2\right)+2E(XY)+E\left(Y^2\right)-\left[\{E(X)\}^2+2E(X)E(Y)+\{E(Y)\}^2\right]\\&=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2+E\left(Y^2\right)-\{E(Y)\}^2=V(X)+V(Y)\end{aligned}$$

よって，次のことが成り立つ。

独立な確率変数の和の分散

確率変数 X，Y が互いに独立であるとき

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

例　1 個のさいころを 2 回投げるとき，1 回目と 2 回目に出る目の和の分散を求める。

1 回目，2 回目に出る目をそれぞれ X，Y とすると，求めるものは $X+Y$ の分散である。

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2=\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)\cdot\frac{1}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{35}{12}$$

同様に　$V(Y)=\frac{35}{12}$

X，Y は独立であるから，出る目の和 $X+Y$ の分散は

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\qquad+\qquad=\frac{35}{6}$$

互いに独立な 3 つの確率変数 X，Y，Z について，次のことが成り立つ。

$$E(XYZ)=E(X)E(Y)E(Z),\quad V(X+Y+Z)=V(X)+V(Y)+V(Z)$$

2 2 つの確率変数 X, Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) $X+Y$ の分散を求めよ。

Point Pickup

独立な確率変数の積の期待値と和の分散

確率変数 X, Y が互いに独立であるとき

$$E(XY)=E(X)E(Y)$$

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$$

第 7 講　PART2 確認問題

1　2つの確率変数 X, Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	1	2	3	計
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$	1

Y	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(1)　XY の期待値を求めよ。

$$E(XY)=\boxed{\text{ア}}$$

(2)　$X+Y$ の分散を求めよ。

$$V(X+Y)=\frac{\boxed{\text{イウ}}}{36}$$

PART2 独立な確率変数

2 2つの確率変数 X, Y が互いに独立で，それぞれの確率分布が下の表で与えられるとき，次の問いに答えよ。

X	0	1	2	3	計
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	1

Y	0	1	2	計
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

(1) XY の期待値を求めよ。

(2) $X+Y$ の分散を求めよ。

[解答]

(1) $E(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{2}$

$E(Y)=0\cdot\frac{1}{4}+1\cdot\frac{2}{4}+2\cdot\frac{1}{4}=1$

X, Y は独立より

$$E(XY)=E(X)\cdot E(Y)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

(2) $E(X^2)=0^2\cdot\frac{1}{8}+1^2\cdot\frac{3}{8}+2^2\cdot\frac{3}{8}+3^2\cdot\frac{1}{8}=3$

$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=3-\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{4}+1^2\cdot\frac{2}{4}+2^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$

$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

X, Y は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$$

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1

(1)　**[正解]** ア：3

[解説]

$X,\ Y$ の期待値はそれぞれ

$$E(X)=1\cdot\frac{2}{9}+2\cdot\frac{5}{9}+3\cdot\frac{2}{9}=2$$

$$E(Y)=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot\frac{2}{6}+2\cdot\frac{2}{6}+3\cdot\frac{1}{6}=\frac{3}{2}$$

$X,\ Y$ は独立より

$$E(XY)=E(X)E(Y)=2\cdot\frac{3}{2}=3$$ [A]

[A]　確率変数 $X,\ Y$ が互いに独立であるとき
$E(XY)=E(X)E(Y)$

(2)　**[正解]** イウ：49

[解説]

$$E(X)=2$$

$$E(X^2)=1^2\cdot\frac{2}{9}+2^2\cdot\frac{5}{9}+3^2\cdot\frac{2}{9}=\frac{40}{9}$$

より，$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\dfrac{40}{9}-2^2=\dfrac{4}{9}$

$$E(Y)=\frac{3}{2}$$

$$E(Y^2)=0^2\cdot\frac{1}{6}+1^2\cdot\frac{2}{6}+2^2\cdot\frac{2}{6}+3^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{19}{6}$$

より，$V(Y)=E(Y^2)-\{E(Y)\}^2=\dfrac{19}{6}-\left(\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{11}{12}$

$X,\ Y$ は独立より

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)=\frac{4}{9}+\frac{11}{12}=\mathbf{\frac{49}{36}}$$ [B]

[B]　確率変数 $X,\ Y$ が互いに独立であるとき
$V(X+Y)=V(X)+V(Y)$